Analyse matricielle - Notions de base

Christophe Lalanne

11 mars 2003

La notation vectorielle ou matricielle présente l'avantage de pouvoir manipuler analytiquement des données de grande taille, ou de résoudre des systèmes d'équations complexes. L'objet de ce document est de rappeller les principales notations et opérations associées au calcul matriciel.

Définition des matrices. Une matrice se définit comme un tableau rectangulaire d'éléments - réels ou complexes - ou de fonctions. Par exemple, la matrice suivante

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix}$$

où a_{ij} constitue l'élément situé à la i-ème ligne et à la j-ième colonne. Cette matrice possède n lignes et m colonnes, et est considérée comme une matrice de dimension $(n \times m)$.

Lorsqu'une matrice ne possède qu'un seul élément, on parle de *scalaire*. Si une matrice ne possède qu'une seule ligne, ou une seule colonne, on parle de *vecteur*. Plus spécifiquement, une matrice est appelée un vecteur colonne ou un vecteur ligne si cette matrice ne possède qu'une colonne ou une ligne, respectivement.

La *transposée* d'une matrice s'obtient en interchangeant l'ensemble des colonnes avec l'ensemble des lignes qui la composent. Ainsi, la transposée d'une matrice A de dimension $(n \times m)$ est une matrice de dimension $(m \times n)$, notée A^T. Par exemple, si A est définie par

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

sa transposée est alors

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \\ 6 & 2 \end{bmatrix}$$

On notera aisément qu'un vecteur colonne devient un vecteur ligne par transposition, et vice versa.

La matrice A est dite *symétrique* si $A = A^T$. Remarquons qu'une matrice ne peut être symétrique que si elle possède un nombre égal de lignes et de colonnes, i.e. une matrice *carrée*. Une propriété particulière de la transposition est celle de la transposée du produit de deux matrices

$$(AB)^T = B^T A^T$$

Si les seuls éléments non nuls d'une matrice carrée sont les éléments appartenant à la diagonale principale, la matrice est dite une matrice *diagonale*. Une matrice diagonale ne possèdant par ailleurs que des éléments égaux à 1 sur la diagonale principale est appelée la matrice *identité*, et est dénotée par le symbole I.

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

Le déterminant d'une matrice carrée, noté $|A|$, est un scalaire dérivé des lignes et des colonnes par la méthode qui suit. Pour une matrice $A(2 \times 2)$, le déterminant de A est calculé ainsi :

$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$

Une procédure générale de calcul du déterminant d'une matrice de taille quelconque nécessite de connaître les cofacteurs et les mineurs. Le *mineur* M_{ij} est le déterminant d'une nouvelle matrice est formé à partir de la suppression des lignes et colonnes associées à l'élément a_{ij} de la matrice initiale. Par exemple, le mineur M_{22} de

$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$

est le déterminant de la matrice obtenue après élimination de la ligne et de la colonne contenant l'élément a_{22}, i.e.

$M_{22} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$

Un *cofacteur* C_{ij} est défini à partir du mineur M_{ij} comme

$C_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$

Par exemple, le cofacteur C_{23} de la matrice A précédente est donné par

$C_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$

La procédure générale de calcul du déterminant d'une matrice est de sélectionner chaque ligne et colonne et de faire la somme du produit des $a_{ij}C_{ij}$ pour chaque élément associé aux lignes et colonnes choisies. Il est alors avantageux de commencer par les lignes et les colonnes possédant le plus d'éléments nuls afin de réduire le nombre de calculs intermédiaires. En guise d'illustration, voici le calcul « manuel » du déterminant de la matrice (3×3) suivante :

soit $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 6 & -4 \\ -3 & 0 & 5 \end{bmatrix}$

alors $|A| = 3(-1)^3 \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ -3 & 5 \end{vmatrix} + 6(-1)^4 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 5 \end{vmatrix} + 0(-1)^5 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = -3(22) + 6(8) + 0 = 18$

Si le déterminant d'une matrice est égal à 0, cela signifie que les lignes (et les colonnes) de la matrice ne sont pas linéairement indépendantes. Une telle matrice est appelée matrice *singulière.* A l'opposé, une matrice dont le déterminant est non nul est une matrice non-singulière.

Remarque : le déterminant d'une matrice peut être considéré comme le volume d'un hypercube défini par les vecteurs colonnes (ou lignes) de la matrice. Pour une matrice (2×2), c'est une aire, et pour une matrice (3×3), c'est un volume.

Enfin, une propriété particulière du déterminant pour le produit de matrices est la suivante

$|AB| = |A|\,|B|$

Addition de matrices. Deux matrices peuvent être additionnées ous soustraites si elles sont de même dimension, i.e. si elles possèdent le même nombre de lignes et de colonnes. On additionne deux matrices en additionnant leurs élements correspondants. Ainsi, si l'on a

$C = A + B$

les éléments de la matrice résultante C sont

$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$

De manière analogue, la soustraction de matrices avec

$C = A - B$

implique

$c_{ij} = a_{ij} - b_{ij}$

Par exemple, soient

$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ et $B = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$

alors

$A + B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ et $A - B = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$

Les propriétés de commutativité et d'associativité sont valables pour ces opérations d'addition sur les matrices, ce qui signifie que

$A + B = B + A$

$A + (B + C) = (A + B) + C$

Multiplication de matrices. Deux matrices peuvent être multipliées à condition qu'elles soient « conformes ». On entend par là que le nombre de colonnes de la première matrice est égal au nombre de lignes de la seconde matrice. Si l'on considère la multiplication d'une matrice $A(n \times m)$ avec une matrice $B(m \times p)$, la matrice résultante $C = AB$ est de dimension $(n \times p)$. Le produit est calculé selon la formule suivante :

$c_{ij} = \sum_{k=1}^{m} a_{ik} b_{ki}$, $\forall i = 1, 2, ..., n$ et $\forall j = 1, 2, ..., m$.

Par exemple, considérons les matrices

$A = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 6 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ et $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

le produit C est calculé comme étant

$C = AB = \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ -4 & 4 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$

Ici, par exemple, l'élément c_{21}a été calculé à l'aide de la formule

$c_{21} = 2(1) + 6(-1) = -4$

La multiplication n'est pas définie pour les matrices non-conformes. Une exception à cette règle est le cas de la multiplication d'une matrice par un scalaire. Dans ce cas, la matrice résultante est obtenue en multipliant tous les éléments de la matrice par le scalaire.

$k \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ka_{11} & ka_{12} \\ ka_{21} & ka_{22} \end{bmatrix}$

Les propriétés d'associativité et de distributivité sont valables pour la mutliplication de deux matrices, ainsi :

$(AB)C = A(BC)$

$A(B + C) = AB + AC$

Cependant, la multiplication n'est pas commutative dans la plupart des cas, i.e.

$AB \neq BA$

Considérons par exemple les deux matrices suivantes :

$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 6 & 2 \end{bmatrix}$ et $B = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$

un simple calcul montre aisément que

$AB = \begin{bmatrix} 13 & 15 \\ 30 & 10 \end{bmatrix}$, et $BA = \begin{bmatrix} 4 & 12 \\ 33 & 19 \end{bmatrix}$

Une exception à cette propriété de non-commutativité est le cas de la matrice *identité* où

$AI = IA = I$

Solution de systèmes linéaires d'équations et inversion de matrice Considérons par exemple le système d'équations suivant :

$x_1 + x_3 = 1$

$2x_1 + x_2 = 0$

$x_1 + x_2 + 2x_3 = 2$

qui peut être réécrit sous la forme

$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$

ou

$Ax = b$ avec $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ et $b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$

On cherche à déterminer le vecteur x satisfaisant à l'équation ci-dessus. Afin de trouver la solution, il est nécessaire d'une certaine manière de diviser b par A. Cela amène au concept de l'inversion de matrice. L'*inverse* d'une matrice A, notée A^{-1}, est définie telle que

$A^{-1}A = AA^{-1} = I$

Ainsi, si l'on connaît A^{-1}, on peut résoudre l'équation initiale en multipliant les deux membres (droite et gauche) de l'équation par A^{-1} puisque

$A^{-1}Ax = A^{-1}b$

donnant la solution

$x = A^{-1}b$

Pour la matrice A décrite précédemment, on vérifie aisément (après avoir montré que $A^{-1}A = I$) que A^{-1} équivaut à

$$A^{-1} = \left[\begin{array}{ccc} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{4}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{array}\right]$$

et ainsi la solution de l'équation est

$$x = A^{-1}b = \left[\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 1 \end{array}\right]$$

Il faut mentionner que l'inverse d'une matrice existe si et seulement si la matrice est carrée et non-singulière. Il est équivalent de dire qu'il existe une solution unique au système d'équations linéaires si et seulement s'il existe autant d'équations que d'inconnues et que les équations sont linéairement indépendantes.

Une formule permettant le calcul de l'inverse d'une matrice est donnée ci-dessous :

$A^{-1} = \frac{adj(A)}{|A|}$

où $adj(A)$ représente la matrice d'*adjacence* de A, qui est en fait la transposée de la matrice composée des cofacteurs de A, i.e.

$adj(A) = [C_{ij}]^T$

Par exemple, l'inverse d'une matrice (2×2)

$$A = \left[\begin{array}{cc} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{array}\right]$$

est

$$A^{-1} = \frac{1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \left[\begin{array}{cc} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{array}\right]$$

et l'inverse d'une matrice (3×3)

$$A = \left[\begin{array}{ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{array}\right]$$

est

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \left[\begin{array}{ccc} \left|\begin{array}{cc} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{array}\right| & -\left|\begin{array}{cc} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{array}\right| & \left|\begin{array}{cc} a_{12} & a_{13} \\ a_{23} & a_{33} \end{array}\right| \\ -\left|\begin{array}{cc} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{array}\right| & \left|\begin{array}{cc} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{array}\right| & -\left|\begin{array}{cc} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{array}\right| \\ \left|\begin{array}{cc} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{array}\right| & -\left|\begin{array}{cc} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{array}\right| & \left|\begin{array}{cc} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{array}\right| \end{array}\right]$$

Lorsque A est une matrice non-singulière, $Ax = b$ possède une solution unique $x = A^{-1}b$, comprenant $b = 0$, solution homogène. Lorsque la matrice A est singulière, le système $Ax = b$ possède soit aucune solution, soit une infinité de solutions. Dans ce cas, il existe une infinité de solutions homogènes x puisque on peut toujours trouver une solution homogène non-triviale (non nulle), et qu'ensuite la solution multipliée par n'importe quelle constante est toujours une solution homogène. S'il existe une solution particulière qui satisfait $Ax_p = b$, alors il en est de même pour $x = x_p + x_h$.

Valeurs propres et vecteurs propres Nous venons de voir comment la notation matricielle permet de réécrire les systèmes d'équations linéaires, et la procédure de résolution de tels systèmes. De façon analogue, la notation vectorielle/matricielle est utile pour représenter des systèmes d'équations différentielles linéaires. Par exemple, le système d'équations différentielles

$\dot{x}_1 = 4x_1 - 5x_2$

$\dot{x}_2 = 2x_1 - 3x_2$

peut être réécrit de la sorte :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -5 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

ou

$\dot{x} = Ax$ avec $A = \begin{bmatrix} 4 & -5 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$, $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$, et $\dot{x} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix}$

La méthode de résolution de ce type d'équations différentielles ne sera pas abordé ici. Néanmoins, cet exemple permet d'aborder la notion de valeurs propres et de vecteurs propres qui s'avèrent être des outils très utiles pour la résolution de tels systèmes. Nous allons simplement énoncer la procédure de calcul des valeurs propres d'une matrice.

Une façon de résoudre le problème est de considérer les solutions exponentielles pures, ou en d'autres termes de rechercher des solutions de la forme

$x_1(t) = e^{\lambda t}\nu_1$

$x_2(t) = e^{\lambda t}\nu_2$

En substituant ces expressions dans les équations différentielles initiales, on trouve

$\lambda e^{\lambda t}\nu_1 = 4e^{\lambda t}\nu_1 - 5e^{\lambda t}\nu_2$

$\lambda e^{\lambda t}\nu_2 = 2e^{\lambda t}\nu_1 - 3e^{\lambda t}\nu_2$

Le facteur $e^{\lambda t}$ est commun à tous les termes et peut donc être factorisé, ce qui donne

$4\nu_1 - 5\nu_2 = \lambda\nu_1$

$2\nu_1 - 3\nu_2 = \lambda\nu_2$

ou

$$\begin{bmatrix} 4 & -5 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \end{bmatrix}$$

Remarquons que la matrice carrée ci-dessus est la même que la matrice A de l'équation différentielle initiale. Cela amène à l'équation fondamentale

$A\nu = \lambda\nu$

Cette équation comporte deux inconnues, un scalaire λ et un vecteur ν. Le scalaire λ satisfaisant l'équation est appelé une *valeur propre* de la matrice A, et le vecteur associé ν est appelé *vecteur propre*.

La méthode de détermination des valeurs propres est de réécrire l'équation précédente sous la forme

$(A - \lambda I)\nu = 0$

Remarquons que si la matrice $(A - \lambda I)$ est non-singulière, l'unique solution est la solution triviale ($\nu = 0$), qui ne présente pas un grand intérêt. Il est par conséquent nécessaire que la matrice $(A - \lambda I)$ soit singulière ou que

$|A - \lambda I| = 0$

Cette dernière équation est appelée équation caractéristique, et ses racines sont les valeurs propres de la matrice A. Pour l'exemple précédent, l'éqaution caractéristique est calculée comme suit :

$$|A - \lambda I| = \left| \begin{bmatrix} 4 & -5 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right| = \begin{vmatrix} 4-\lambda & -5 \\ 2 & -3-\lambda \end{vmatrix} = (4-\lambda)(-3-\lambda) + 10 = 0$$

entraînant

$\lambda^2 - \lambda - 2 = 0$

et les valeurs propres sont

$\lambda = -1, 2$