Analyse combinatoire

5 avril 2003

Les définitions et les exemples proposés dans ce tutoriel sont extraits du livre [1].

Arrangements

Définition

On appelle arrangement de n éléments p à p (p≤n), tout ensemble ordonné de p de ces éléments, tous distincts. On notera A_n^p le nombre total d'arrangements distincts de n éléments p à p.

Par exemple, soit un ensemble composé de 4 lettres : {a, b, c, d}. Les groupements (abc), (acd), (bca), ... constituent des arrangements de ces 4 lettres 3 à 3.

Calcul de A_n^p

Le nombre total d'arrangements de n objets p à p est :

$A_n^p = n(n-1)(n-2)\ldots(n-p+2)(n-p+1)$

En utilisant la notation factorielle, sachant que $n! = 1.2.3\ldots(n-2)(n-1)n$, on obtient l'expression suivante pour le calcul de A_n^p :

$A_n^p = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-p+1)(n-p)!}{(n-p)!} = \frac{n!}{(n-p)!}$

Exemple : Nombre de tiercés dans l'ordre dans une course de 10 chevaux.

$A_{10}^3 = 10.9.8 = 720$, ou avec la notation factorielle $A_{10}^3 = \frac{10!}{7!} = 10.9.8 = 720$

Arrangement avec répétition (ou remise)

Un arrangement de n objets p à p avec répétition (ou remise) est un arrangement où chaque objet peut être répété au plus p fois. On notera un tel arrangement $\alpha_n^p = n^p$.

Par exemple, les 4 lettres a, b, c, d peuvent être arrangées 2 à 2 de $\alpha_4^2 = 4^2 = 16$ façons différentes.

Permutations

Définition

Une permutation de n objets se définit comme un ensemble ordonné de ces n objets. C'est en fait un cas particulier des arrangements, avec n=p. Deux permutations distinctes ne différent donc que par l'ordre des objets.

Calcul de P_n

Le nombre total de permutations P_n s'obtient à partir de la formule des arrangements (A_n^p), avec $p = n$, et la convention $0! = 1$, soit

$P_n = A_n^n = n!$

Exemple 1 : Nombre de permutations possibles pour les 3 lettres a, b, c.

$P_3 = A_3^3 = 3! = 6$

Exemple 2 : Nombre de configurations possibles à l'arrivée d'une course de 8 chevaux.

$P_8 = 8! = 40320$

Permutation avec répétition

Il peut arriver dans le cas des permutations qu'un certain nombre r d'objets parmi les n objets soient identiques, auquel cas on ne peut distinguer les permutations de ces r objets entre eux. Pour calculer le nombre de permutations possibles, il est par conséqeunt nécessaire de diviser le nombre de permutations des n objets par le nombre de permutations des r objets, soit

$P_n\,(r) = \frac{P_n}{P_r} = \frac{n!}{r!}$

Dans le cas où il y a plus d'un type d'objets identiques, ou en d'autres termes, lorsque l'on veut généraliser ce résultat à k répétitions, on considère les n objets parmi lesquels il existe r_1, r_2, ..., r_k objets semblables entre eux, avec $r_1 + r_2 + \ldots + r_k = n$. On appelle alors permutation de n objets avec répétitions (r_1, r_2, ..., r_k) toute partition de ces n objets en k parties telles que la $i^{\text{ème}}$ partie ait r_i éléments $(1 \leq i \leq k)$, et on a

$P_n\,(r_1,\, r_2,\, \ldots, r_k) = \frac{n!}{r_1!r_2!\ldots r_k!}$

Exemple : Nombre de permutations possibles avec les lettres du mot ETRENNE.

$P_n\,(r_E = 3,\, r_N = 2) = \frac{7!}{3!2!} = 420$

Permutation circulaire

n objets peuvent être disposés sur un cercle de (n-1)! façons différentes, soit le nombre de permutations P_n divisé par le nombre de manières différentes n de choisir la première place.

Combinaisons

Définition

On appelle combinaison de p éléments pris parmi n (n≥p), tout ensemble que l'on peut former en choisissant p de ces éléments, sans considération d'ordre.

Par exemple, si l'on reprend l'ensemble composé de 4 lettres : {a, b, c, d}, les combinaisons 3 à 3 possibles sont : abc, abd, bcd, acd.

Calcul de C_n^p

Le nombre total de combinaisons de p éléments pris parmi n, ou de n objets p à p, est :

$C_n^p = \frac{A_n^p}{p!} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-p+1)}{p!} = \frac{n!}{(n-p)!p!}$

On trouve parfois également la notation $\binom{n}{p}$ pour le nombre total de combinaisons C_n^p.

A l'aide de l'expression précédente, il est possible de démontrer deux relations fondamentales :

$C_n^p = C_n^{n-p}$

$C_n^p = C_{n-1}^p + C_{n-1}^{p-1}$

Exemple 1 : Nombre de tiercés dans le désordre dans une course de 10 chevaux.

$C_3^{10} = \frac{10.9.8}{1.2.3} = 120$

Exemple 2 : Nombre de mains différentes de 8 cartes dans un jeu de 32 cartes.

$C_{32}^8 = \frac{32.31.30.29.28.27.26.25}{1.2.3.4.5.6.7.8} = 10518300$

Permutations avec répétitions et combinaisons

Une permutation de n objets avec répétition $r_1= p$ et $r_2=$ n-p (n$\leq$p) est une partition de ces n objets en deux ensembles, l'un de p éléments, l'autre de n-p éléments. Se donner une telle permutation revient donc au même que se donner une partie de p éléments parmi n, c'est-à-dire une combinaison de n éléments pris p à p. On a donc :

$C_n^p = P_n(n, n-p)$

Une permutation de n objets à répétition (r_1, r_2, ..., r_k) s'appelle aussi une combinaison généralisée. De même que l'on a $C_n^p = \binom{n}{p}$, on note $P_n(r_1 + r_2 + \ldots + r_k) = \binom{n}{r_1+r_2+\ldots+r_k}$.

Binôme de Newton

Le binôme de Newton est le produit de n facteurs égaux à (a+b), soit $(a+b)^n$. Le développement de ce binôme est :

$(a+b)^n = \sum_{p=0}^{n} C_n^p a^{n-p} b^p$

La relation $C_n^p = C_{n-1}^p + C_{n-1}^{p-1}$ exposée précédemment permet de déterminer de proche en proche les différents coefficients C_n^p au moyen du triangle de Pascal. L'utilisation du triangle de Pascal permet non seulement de calculer les coefficients du binôme, mais également de démontrer par récurrence des formules relatives à ces coefficients.

Combinaisons avec répétition

On s'intéresse dans ce cas au nombre de répartitions possibles de n objets en fonction de r critères. Une telle répartition est appelée combinaison avec répétion d'ordre r.

Le nombre de ces combinaisons avec répétition est

$\left[{n \atop r}\right] = C_{n+r-1}^r$

Cela correspond en fait au nombre de manières de choisir r objets parmi n+r-1, sans tenir compte de l'ordre.

Exemple : Lors d'un sondage dans une université, on pose à 100 étudiants une question comportant 3 réponses possibles. Quel est le nombre de configurations différentes que l'on peut choisir ?

Chaque configuration représente une combinaison de 100 réponses avec répétition d'ordre 3. Le nombre de ces combinaisons est donc :

$\left[{n \atop r}\right] = \left[{100 \atop 3}\right] = C_{102}^3 = \frac{102.101.100}{1.2.3} = 171700$

Références

[1] Amzallag, E., Picciolo, N. et Bry, F. (1993). *Introduction à la statistique.* Hermann, Paris.