Exercices supplémentaires [*]

Christophe Lalanne Emmanuel Chemla

Exercices

Exercice 1 Un grand magasin a n portes d'entrée ; r personnes arrivent à des instants divers et choisissent au hasard une entrée indépendamment les unes des autres. Quelle est la probabilité que les r personnes soient passées par des portes différentes ? [Solution]

Exercice 2 On jette 3 dés. On peut obtenir une somme de 9 ou 10 de 6 façons différentes. L'expérience montre que l'on obtient 10 plus souvent que 9, pourquoi ? [Solution]

Exercice 3 Le loto. [1] Le jeu consiste à cocher sur une grille de 6 numéros distincts compris entre 1 et 49. Le résultat du tirage donne 6 numéros gagnants : a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6 et un numéro complémentaire b. Ces nouvelles règles ont été instaurées en 1997 ; en particulier, le numéro complémentaire joue en effet un rôle particulier puisqu'il module les gains du joueur.
Un joueur remplit une grille. Au total, on distingue 7 cas de figure correspondant à un gain particulier. Calculer la probabilité des événements suivants :

1. il a coché les 6 numéros gagnants
2. il a coché 5 des 6 numéros gagnants et le complémentaire
3. il a coché 5 des 6 numéros gagnants sans le complémentaire
4. il a coché 4 des 6 numéros gagnants et le complémentaire
5. il a coché 4 des 6 numéros gagnants sans le complémentaire
6. il a coché 3 des 6 numéros gagnants et le complémentaire
7. il a coché 3 des 6 numéros gagnants
8. un parmi des 5 événements précédents (le joueur gagne)

[Solution]

[*] Source : CNAM, 2005–2006

1. Le lecteur intéressé trouvera dans G. Pagès & C. Bouzitat (2003). *En passant par hasard... Les probabilités de tous les jours* (3[e]édition) une présentation « édifiante » des rouages de la Française des Jeux, dans la partie intitulée *L'État-Casino*.

Exercice 4 Trois personnes A, B, C sont placées « au hasard » sur une ligne droite. On considère les deux événements :
E : « B est à la droite de A »
F : « C est à la droite de A »
Les événements E et F sont-ils indépendants ? [Solution]

Exercice 5 A et B lancent alternativement une paire de dés. A gagne s'il obtient 6 points avant que B n'obtienne 7 points. B gagne s'il obtient 7 points avant que A n'obtienne 6 points. Si A commence le jeu, quelle est sa probabilité de gagner ? Quelle est la probabilité que le jeu ne se termine pas ? Reprendre les mêmes questions en supposant que le jeu s'arrête au plus tard au bout de $2n$ lancers. [Solution]

Exercice 6 Le quart d'une population a été vacciné contre une maladie contagieuse. Au cours d'une épidémie, on constate qu'il y a parmi les malades un vacciné pour quatre non vaccinés. On sait, de plus, qu'au cours de cette épidémie il y avait un malade sur 12 parmi les vaccinés.
Quelle était la probabilité de tomber malade pour un non vacciné ? Le vaccin est-il efficace ? [Solution]

Exercice 7 Une population est composée pour $1/5$ d'individus de type A et pour $4/5$ d'individus de type B. Un individu réagit positivement à un certain test biologique avec une probabilité égale à 0.7 s'il est de type A, et avec une probabilité égale à 0.1 s'il est de type B

1. Un individu étant choisi au hasard, quelle est la probabilité pour qu'il réagisse positivement au test ? Sachant qu'il a réagit positivement à ce test, quelle est la probabilité pour qu'il soit de type A ?
2. À un même individu choisi au hasard, on fait subir le test 3 fois de suite, mais à des moments suffisamment espacés pour que, si l'on connaît son type, ces 3 résultats soient indépendants. Quelle est la probabilité pour que les 2 premiers tests soient $++$? Quelle est la probabilité pour que les résultats des 3 tests soient $+-+$?
3. Quelle est la probabilité pour que l'individu soit de type A :
   – si l'on sait que les 2 premiers tests sont $+$?
   – si l'on sait que les résultats des 3 tests sont $+-+$?

[Solution]

Solutions

Il peut parfois exister d'autres façons de résoudre les problèmes posés. Nous n'en proposons qu'une seule.

Solution 1. L'expérience aléatoire consiste en « r personnes choisissent une porte au hasard ». On construit un résultat de la manière suivante :
- si $r = 2$, on a un couple $(i, j)_{\substack{i=1\ldots n \\ j=1\ldots n}}$;
- si r est quelconque, on a un tuple $(i_1, i_2, \ldots, i_r)_{i_k=1\ldots n}$, d'où n^r résultats possibles avec la même probabilité $1/n^r$.

Si on considère l'événement E : « les r personnes sont passées par des portes différentes », en supposant $r \leq n$ (sinon $\mathrm{P}(E) = 0$ car $E = \emptyset$), on cherche le nombre de façons de construire tous les résultats. Le nombre de résultats qui réalisent E est

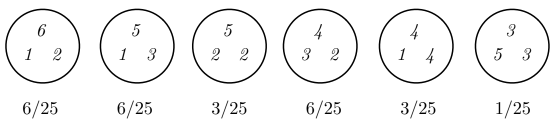
$$n(n-1)\ldots(n-r+1) = \frac{n!}{(n-r)!} \ ,$$

d'où l'on déduit

$$\mathrm{P}(E) = \frac{n!}{(n-r)!} \times \frac{1}{n^r} \ .$$

Si $r = 2$, on trouve $\mathrm{P}(E) = 1 - 1/n$ soit $\mathrm{P}(E) = 0.75$ si $n = 4$.

Solution 2. On peut énumérer les différents résultats possibles puisqu'il n'y a que 3 dés. Au total, il y a 25 manières d'obtenir un 9, mais seulement 6 façons si on ne considère pas les permutations :



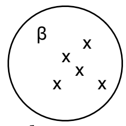
Par contre, pour attacher des probabilités à ces « paquets », il faut tenir compte de l'ordre. Ainsi, $\mathrm{P}(\text{« j'obtiens 9 »}) = \frac{25}{6^3}$. En appliquant le même raisonnement, on trouverait qu'il y a 27 manières d'obtenir un 10[2] et donc une probabilité $\frac{27}{6^3}$.

Solution 3. L'expérience aléatoire consiste à « cocher 6 numéros ». Il y a donc $\binom{49}{6}$ résultats (ou grilles de jeu) possibles.

1. L'événement « les 6 numéros gagnants sont cochés » n'est réalisé que par un seul résultat, d'où $\mathrm{P}(\text{« 1 »}) = \frac{1}{\binom{49}{6}}$ ($\approx 7.15^{-8}$!).

2. Sous R, on obtient ce résultat avec une commande du type :
`sum(apply(expand.grid(a=1 :6,b=1 :6,c=1 :6),1,function(x) ifelse(sum(x)==10,1,0))).`

2. On dénote le complémentaire par β. Il y a $\binom{6}{5}$ façons de choisir 5 numéros gagnants, β fixé.



   L'événement « 5 des 6 numéros gagnants et le complémentaire sont cochés » est donc réalisé avec une probabilité

$$\mathrm{P}(\text{« } 2 \text{ »}) = \frac{\binom{6}{5}\binom{1}{1}}{\binom{49}{6}} .$$

   On remarquera que $\mathrm{P}(\text{« } 2 \text{ »}) = 6\,\mathrm{P}(\text{« } 1 \text{ »})$.

3. Si on considère qu'il y a $\binom{6}{5}$ façons de choisir 5 numéros, et comme on « rate » 2 numéros (le 6$^{\mathrm{e}}$ + le complémentaire), on arrive à $\binom{6}{5}(49-7) = 6 \times 42 = 252$ résultats possibles. Ici, $(49-7)$ correspond en fait à $\binom{49-(6+1)}{1}$. On en déduit que $\mathrm{P}(\text{« } 3 \text{ »}) = \frac{252}{\binom{49}{6}}$.

4. En décomposant les différents éléments constitutifs d'un résultat possible, en incluant le complémentaire, on arrive à

$$\mathrm{P}(\text{« } 4 \text{ »}) = \frac{\overbrace{\binom{6}{4}}^{\text{4 numéros}} \times \overbrace{\binom{1}{1}}^{\text{compl.}} \times \overbrace{\binom{42}{1}}^{\text{1 numéro}}}{\binom{49}{6}} = \frac{630}{\binom{49}{6}} .$$

5. Sans le complémentaire, la probabilité de succès devient

$$\mathrm{P}(\text{« } 5 \text{ »}) = \frac{\binom{6}{4}\binom{42}{2}}{\binom{49}{6}} = \frac{12\,915}{\binom{49}{6}} .$$

6. Le calcul de $\mathrm{P}(\text{« } 6 \text{ »})$ suit le même principe que pour $\mathrm{P}(\text{« } 4 \text{ »})$ et on trouve

$$\mathrm{P}(\text{« } 6 \text{ »}) = \frac{\binom{6}{3}\binom{1}{1}\binom{42}{2}}{\binom{49}{6}} = \frac{17\,220}{\binom{49}{6}} .$$

7. En excluant le complémentaire, et avec le même raisonnement que précédemment, on obtient

$$\mathrm{P}(\text{« } 7 \text{ »}) = \frac{\binom{6}{3}\binom{42}{3}}{\binom{49}{6}} = \frac{229\,600}{\binom{49}{6}} .$$

8. Si on note que tous les événements calculés ci-dessus sont indépendants, on peut sommer tous les résultats (qui incluent le complémentaire), et on conclut qu'il y a $260\,624/\binom{49}{6} = 0.0186$ chances de se retrouver dans un des cas de figure 1–7. On trouvera page 8 quelques éléments de réflexion sur « l'utilité » de ce jeu, qui sont directement empruntés à l'ouvrage de Pagès & Bouzitat.

Solution 4. Il y a $3! = 6$ façons de disposer les trois personnes côte à côte (ABC, ACB, BAC, BCA, CAB, CBA). Parmi ces six possibilités équiprobables (1/6), trois réalisent E, d'où $\mathrm{P}(E) = 1/2$. Un raisonnement analogue conduit à $\mathrm{P}(F) = 1/2$.
Or $E \cap F = \{ABC, ACB\}$ et $\mathrm{P}(E \cap F) = 1/3$.
On en déduit que E et F ne sont pas indépendants.

Solution 5. Ce problème est l'un des 5 *Problèmes de Huygens*. Si on note $p_A = \mathrm{P}(\text{« obtenir 6 points »})$ et $p_B = \mathrm{P}(\text{« obtenir 7 points »})$, on a évidemment

$$p_A = \frac{5}{36} \quad \text{et} \quad p_B = \frac{6}{36}$$

(là encore, la tâche de dénombrement peut s'effectuer manuellement). Pour calculer la probabilité que A a de gagner, sachant que c'est lui qui commence le jeu, on peut considérer que l'événement A : « A gagne » résulte de la somme des événements A_i : « A gagne à son i$^{\text{e}}$ lancer » car ces événements sont incompatibles. On a donc $\mathrm{P}(A) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathrm{P}(A_i)$ (axiome de σ-additivité). Si l'on évalue les termes un par un, on a

Christiaan Huygens (1629–1695) s'est intéressé aux jeux de hasard et a suscité une reprise des échanges entre Pascal et Fermat en 1656–1657. Il publia en 1657 *De Ratiociniis in ludo aleae.*

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{P}(A_1) & = & p_A \\ \mathrm{P}(A_2) & = & q_A q_B p_A \\ & \vdots & \\ \mathrm{P}(A_i) & = & (q_A q_B)^{i-1} p_A \end{array}$$

avec $q_A = 1 - p_A$ et $q_B = 1 - p_B$. On en déduit que

$$\mathrm{P}(A) = \sum_{i=1}^{\infty} (q_A q_B)^{i-1} p_A \ ,$$

et l'on reconnaît dans cette expression une série géométrique qui peut s'exprimer sous la forme

$$\mathrm{P}(A) = p_A \frac{1}{1 - q_A q_B} \ .$$

Comme $|q_A q_B| < 1$, la série converge. L'application numérique montre que A a moins d'une chance sur deux de gagner dans cette configuration.

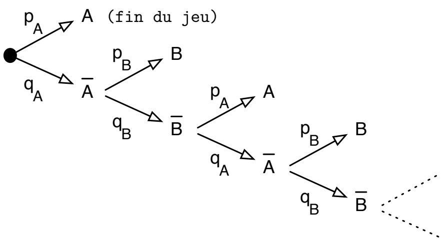
$$\mathrm{P}(A) = \frac{5}{36} \times \frac{1}{1 - \frac{31}{36} \times \frac{30}{36}} = \frac{30}{61} < \frac{1}{2}$$

Si l'on procède aux mêmes calculs pour B, on arrive à $\mathrm{P}(B) > \frac{1}{2}$, donc B conserve son avantage initial.
Si l'on s'intéresse à la probabilité que le jeu ne se termine pas, cela revient à

s'intéresser à l'événement $\bar{A} \cap \bar{B}$. Or

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{P}(\bar{A} \cap \bar{B}) & = & 1 - \mathrm{P}(A \cup B) \\ & = & 1 - \mathrm{P}(A) - \mathrm{P}(B) \\ & = & 1 - p_A \frac{1}{1-q_A q_B} - q_A p_B \frac{1}{1-q_A p_B} \\ & = & 1 - \frac{1}{1-q_A q_B}(p_A + q_A p_B) \\ & = & 0 \quad \text{car} \quad p_A + q_A p_B = 1 - q_A + q_A(1-q_B) = 1 - q_A q_B \end{array}$$

On en conclut que le jeu se terminera forcément... On peut toujours représenter ce type de succession d'alternatives binaires sous la forme d'un arbre.



À la lecture de cet arbre binaire, on voit que $\mathrm{P}(\bar{A} \cap \bar{B}) = (q_A q_B)^\infty = 0$; cela correspond à suivre une « ligne droite » sur l'arbre.
Enfin, pour calculer la probabilité que le jeu s'arrête au bout de $2n$ lancers, on pose

$$\mathrm{P}(A) = \sum_{i=1}^{n} p_A \frac{1 - (q_A q_B)^n}{1 - q_A q_B} \ ,$$

et de même

$$\mathrm{P}(B) = \sum_{i=1}^{n} q_A p_B \frac{1 - (q_A q_B)^n}{1 - q_A q_B} \ .$$

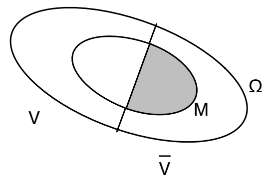
Dans ce cas la probabilité que le jeu ne s'arrête pas est différente de 0 car elle vaut

$$\begin{array}{l} 1 - p_A \frac{1-(q_A q_B)^n}{1-q_A q_B} - q_A p_B \frac{1-(q_A q_B)^n}{1-q_A q_B} \\ \quad = 1 - \frac{1-(q_A q_B)^n}{1-q_A q_B}(p_A + q_A p_B) \\ \quad = 1 - \big(1 - (q_A q_B)^n\big) \\ \quad = (q_A q_B)^n \end{array}$$

Solution 6. L'expérience aléatoire consiste à « tirer un individu au hasard ». Si on dénote par M l'événement « l'individu est malade », V l'événement « l'individu est vacciné », l'énoncé nous indique les faits suivants :
- $\mathrm{P}(V) = 1/4$
- $\mathrm{P}(\bar{V} \mid M) = 4\,\mathrm{P}(V \mid M)$, d'où l'on déduit que $\mathrm{P}(V \mid M) = 1/5$
- $\mathrm{P}(M \mid V) = 1/12$

On cherche donc $\mathrm{P}(M \mid \bar{V})$, exemple typique du schéma bayésien (on connaît une probabilité *a priori* et on cherche une probabilité *a posteriori*). En utilisant le lien entre ces deux probabilités, on a

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(M \mid \bar{V}) &= \tfrac{\mathrm{P}(M\cap\bar{V})}{\mathrm{P}(\bar{V})} \\
&= \tfrac{\mathrm{P}(M)\,\mathrm{P}(\bar{V}|M)}{1-\mathrm{P}(V)} \\
&= \tfrac{\mathrm{P}(M)\times\mathrm{P}(V|M)}{1-\mathrm{P}(V)} \\
&= \tfrac{4\,\mathrm{P}(M\cap V)}{1-\mathrm{P}(V)} \\
&= \tfrac{4\times1/4\times1/12}{1-1/4} = \tfrac{1}{9}
\end{aligned}$$



à comparer à $\mathrm{P}(M \mid V) = \frac{1}{12}$.

Solution 7. On choisi de désigner par A l'événement « l'individu choisi est de type A » et par B l'événement « l'individu choisi est de type B ». T^+ désignera l'événement « le test est positif ». D'après l'énoncé, on a

$$\mathrm{P}(A) = \frac{1}{5}, \quad \mathrm{P}(B) = \frac{4}{5}\ ,$$

et

$$\mathrm{P}(T^+ \mid A) = 0.7, \quad \mathrm{P}(T^+ \mid B) = 0.1\ .$$

1. L'idée est de réunir les cas possibles de test positif sur les deux populations A et B et de calculer une moyenne pondérée des probabilités conditionnelles. On a donc

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(T^+) &= \mathrm{P}(T^+ \cap A) + \mathrm{P}(T^+ \cap B) \\
&= \mathrm{P}(A)\,\mathrm{P}(T^+ \mid A) + \mathrm{P}(B)\,\mathrm{P}(T^+ \mid B) \\
&= (\tfrac{1}{5} \times 0.7) + (\tfrac{4}{5} \times 0.1) \\
&= \tfrac{11}{50} \quad (\approx 20\%)\ .
\end{aligned}$$

   Par ailleurs, la probabilité qu'un individu ayant réagi positivement soit de type A s'exprime comme

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(A \mid T^+) &= \tfrac{\mathrm{P}(A\cap T^+)}{\mathrm{P}(T^+)} \\
&= \tfrac{\mathrm{P}(A)\,\mathrm{P}(T^+|A)}{\mathrm{P}(T^+)} \\
&= \tfrac{1/5\times0.7}{11/50} = \tfrac{7}{11} \quad (\approx 70\%)\ .
\end{aligned}$$

2. On considère maintenant les événements
   - T_1^+ : « le premier test est positif »,
   - T_2^+ : « le deuxième test est positif ».

On a

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(T_1^+ \cap T_2^+) &= \mathrm{P}(T_1^+ \cap T_2^+ \cap A) + \mathrm{P}(T_1^+ \cap T_2^+ \cap B) \\
&= \mathrm{P}(A)\,\mathrm{P}(T_1^+ \cap T_2^+ \mid A) + \mathrm{P}(B)\,\mathrm{P}(T_1^+ \cap T_2^+ \mid B) \\
&= \mathrm{P}(A)\,\mathrm{P}(T_1^+ \mid A)\,\mathrm{P}(T_2^+ \mid A) + \mathrm{P}(B)\,\mathrm{P}(T_1^+ \mid B)\,\mathrm{P}(T_2^+ \mid B) \\
&= \tfrac{1}{5} \times 0.7 \times 0.7 + \tfrac{4}{5} \times 0.1 \times 0.1 \\
&= \tfrac{52}{500} \quad (\approx 10\%)\ .
\end{aligned}$$

Dans ce cas de figure, on ne connaît pas le type d'individu, donc il n'y a pas indépendence (cf. énoncé). T_1^+ apporte plus d'information, ce qui va en retour modifier T_2^+. Il n'y a en fait indépendance que pour les probabilités conditionnelles. On peut également utiliser une réprésentation par arbre pour s'aider dans le raisonnement.

3. Ici, il s'agit de calculer $\mathrm{P}(A \mid T_1^+ \cap T_2^+)$, puis $\mathrm{P}(A \mid T_1^+ \cap T_2^- \cap T_3^+)$.

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(A \mid T_1^+ \cap T_2^+) &= \tfrac{\mathrm{P}(A \cap T_1^+ \cap T_2^+)}{\mathrm{P}(T_1^+ \cap T_2^+)} \\
&= \tfrac{\mathrm{P}(A)\,\mathrm{P}(T_1^+ \cap T_2^+ | A)}{\mathrm{P}(T_1^+ \cap T_2^+)} \\
&= \tfrac{\mathrm{P}(A)\,\mathrm{P}(T_1^+ | A)\,\mathrm{P}(T_2^+ | A)}{\mathrm{P}(T_1^+ \cap T_2^+)} \\
&= \tfrac{49}{52} \quad (> 90\%)\ .
\end{aligned}$$

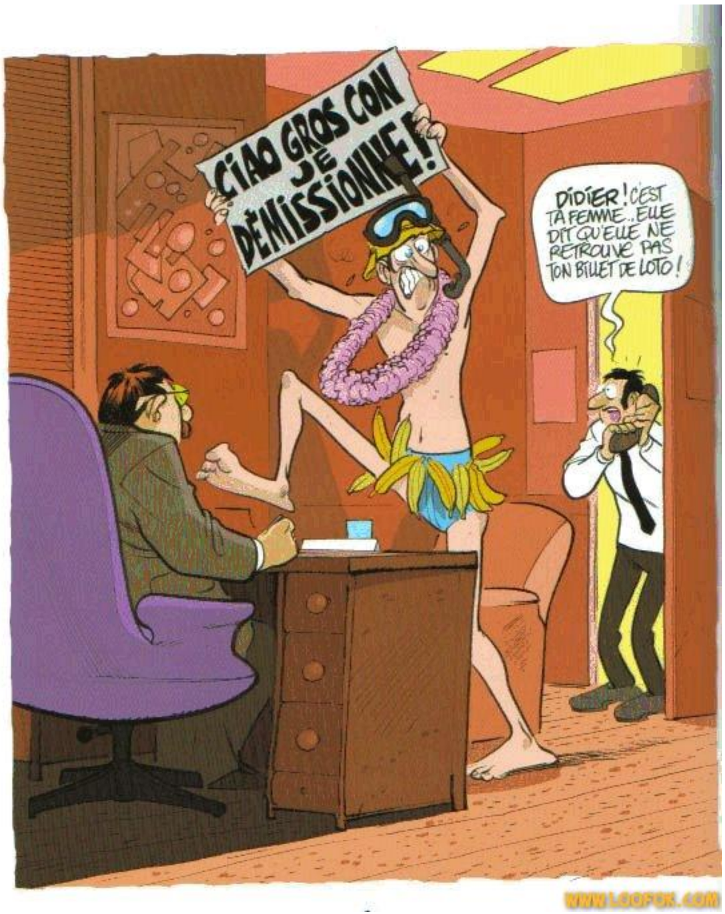
La deuxième probabilité se calcule de la même manière.

Le Loto. Considérations supplémentaires. Le principe de la répartition des gains est identique depuis la création du jeu en 1976 :

- chaque grille validée vaut désormais 2 F et on ne peut valider qu'un nombre pair de grilles dites « simples », compris entre 2 et 8 ;
- la part des mises réaprtie entre les gagnants des différents rangs est un pourcentage constant des jeux. La valeur de ce pourcentage était de 54.6 % lors de la création du jeu.

Il en découle que l'espérance de gain brut du joueur était donc de 0.546 F, soit une perte « sèche » de 0.454 F par franc misé. À titre de comparaison, le taux de prélèvement moyen des jeux de casino est généralement inférieur à 5 %, à l'exception de certains jeux (qui n'excèdent toutefois pas les 12 %) !

De nos jours, le principe de répartition d'un pourcentage fixe des enjeux est toujours en vigieur, même si le taux évolue au fil des initiatives budgétaires du Ministère concerné (e.g. création de la C.S.G. ou de la C.R.D.S). En 2003, le taux de prélèvement sur les mises s'élevait à 49.5 %, dont près de la moitié se retrouve dans les caisses de l'État…


CIAO GROS CON JE DÉMISSIONNE !
DIDIER ! C'EST TA FEMME... ELLE DIT QU'ELLE NE RETROUVE PAS TON BILLET DE LOTO !
WWW.LOOFOK.COM